Лабораторная работа 2

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

СИМПЛЕКС-МЕТОДОМ

Выполнил Берестнев И.В. 4ИСИП-519

Вариант 2

Решим прямую задачу линейного программирования симплексным методом, с использованием симплексной таблицы.  
Определим максимальное значение целевой функции F(X) = 8x1+10x2 при следующих условиях-ограничений.  
15x1+33x2≤571  
15x1+25x2≤577  
9x1+3x2≤445  
Для построения первого опорного плана систему неравенств приведем к системе уравнений путем введения дополнительных переменных (**переход к канонической форме**).  
В 1-м неравенстве смысла (≤) вводим базисную переменную x3. В 2-м неравенстве смысла (≤) вводим базисную переменную x4. В 3-м неравенстве смысла (≤) вводим базисную переменную x5.  
15x1+33x2+x3 = 571  
15x1+25x2+x4 = 577  
9x1+3x2+x5 = 445  
Матрица коэффициентов A = a(ij) этой системы уравнений имеет вид:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| A = | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | 15 | 33 | 1 | 0 | 0 | | 15 | 25 | 0 | 1 | 0 | | 9 | 3 | 0 | 0 | 1 | |  | |

**Базисные переменные** это переменные, которые входят только в одно уравнение системы ограничений и притом с единичным коэффициентом.  
**Экономический смысл дополнительных переменных**: дополнительные переменные задачи ЛП обозначают излишки сырья, времени, других ресурсов, остающихся в производстве данного оптимального плана.  
Решим систему уравнений относительно базисных переменных: x3, x4, x5  
Полагая, что **свободные переменные** равны 0, получим первый опорный план:  
X0 = (0,0,571,577,445)  
**Базисное решение** называется допустимым, если оно неотрицательно.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 |
| x3 | 571 | 15 | 33 | 1 | 0 | 0 |
| x4 | 577 | 15 | 25 | 0 | 1 | 0 |
| x5 | 445 | 9 | 3 | 0 | 0 | 1 |
| F(X0) | 0 | -8 | -10 | 0 | 0 | 0 |

Переходим к основному алгоритму симплекс-метода.  
  
**Итерация №1**.  
**1. Проверка критерия оптимальности**.  
Текущий опорный план неоптимален, так как в индексной строке находятся отрицательные коэффициенты.  
**2. Определение новой базисной переменной**.  
В качестве ведущего выберем столбец, соответствующий переменной x1, так как это наибольший коэффициент по модулю.  
**3. Определение новой свободной переменной**.  
Вычислим значения Di по строкам как частное от деления: bi / ai1  
и из них выберем наименьшее:  
min (17.303 : 0.455 , 144.424 : 3.636 , 393.091 : 7.636 ) = 38.067  
Следовательно, 1-ая строка является ведущей.  
Разрешающий элемент равен (0.455) и находится на пересечении ведущего столбца и ведущей строки.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | min |
| x2 | 17.303 | 0.455 | 1 | 0.03 | 0 | 0 | 38.067 |
| x4 | 144.424 | 3.636 | 0 | -0.758 | 1 | 0 | 39.717 |
| x5 | 393.091 | 7.636 | 0 | -0.091 | 0 | 1 | 51.476 |
| F(X2) | 173.03 | -3.455 | 0 | 0.303 | 0 | 0 |  |

**4. Пересчет симплекс-таблицы**.  
Формируем следующую часть симплексной таблицы. Вместо переменной x2 в план 2 войдет переменная x1.  
Строка, соответствующая переменной x1 в плане 2, получена в результате деления всех элементов строки x2 плана 1 на разрешающий элемент РЭ=0.455. На месте разрешающего элемента получаем 1. В остальных клетках столбца x1 записываем нули.  
Таким образом, в новом плане 2 заполнены строка x1 и столбец x1. Все остальные элементы нового плана 2, включая элементы индексной строки, определяются по правилу прямоугольника.  
Представим расчет каждого элемента в виде таблицы:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 |
| 17.303 : 0.455 | 0.455 : 0.455 | 1 : 0.455 | 0.03 : 0.455 | 0 : 0.455 | 0 : 0.455 |
| 144.424-(17.303\*3.636):0.455 | 3.636-(0.455\*3.636):0.455 | 0-(1\*3.636):0.455 | -0.758-(0.03\*3.636):0.455 | 1-(0\*3.636):0.455 | 0-(0\*3.636):0.455 |
| 393.091-(17.303\*7.636):0.455 | 7.636-(0.455\*7.636):0.455 | 0-(1\*7.636):0.455 | -0.091-(0.03\*7.636):0.455 | 0-(0\*7.636):0.455 | 1-(0\*7.636):0.455 |
| 173.03-(17.303\*-3.455):0.455 | -3.455-(0.455\*-3.455):0.455 | 0-(1\*-3.455):0.455 | 0.303-(0.03\*-3.455):0.455 | 0-(0\*-3.455):0.455 | 0-(0\*-3.455):0.455 |

Получаем новую симплекс-таблицу:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 |
| x1 | 38 | 1 | 2.2 | 0 | 0 | 0 |
| x4 | 6 | 0 | -8 | -1 | 1 | 0 |
| x5 | 102 | 0 | -16 | -0.6 | 0 | 1 |
| F(X2) | 304 | 0 | 7.6 | 0.5 | 0 | 0 |

**1. Проверка критерия оптимальности**.  
Среди значений индексной строки нет отрицательных. Поэтому эта таблица определяет оптимальный план задачи.  
Окончательный вариант симплекс-таблицы:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базис | B | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 |
| x1 | 38 | 1 | 2.2 | 0 | 0 | 0 |
| x4 | 6 | 0 | -8 | -1 | 1 | 0 |
| x5 | 102 | 0 | -16.8 | -0.6 | 0 | 1 |
| F(X3) | 304 | 0 | 7.6 | 0.5 | 0 | 0 |

Оптимальный план можно записать так:  
x1 = 38, x2 = 0  
F(X) = 8\*38+ 10\*0 = 304

Контрольные вопросы

1 Как построить первоначальный опорный план задачи линейного программирования и проверить его на оптимальность?

Для построения первого опорного плана систему неравенств приведем к системе уравнений путем введения дополнительных переменных (**переход к канонической форме**).

Проверка плана на оптимальность. Если найдется хотя бы один коэффициент индексной строки меньше нуля, то план не оптимальный, и его необходимо улучшить.

2 Перечислите условия оптимальности опорного плана задачи линейного программирования на отыскание минимального и максимального значений линейной функции.

Непустое множество планов основной задачи линейного программирования образует выпуклый многогранник. Каждая вершина этого многогранника определяет опорный план. В одной из вершин многогранника решений (т. е. для одного из опорных планов) значение целевой функции является максимальным (при условии, что функция ограничена сверху на множестве планов). Если максимальное значение функция принимает более чем в одной вершине, то это же значение она принимает в любой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией данных вершин.

3 Как определяется вектор для включения в базис, если первоначальный план не является оптимальным?

Для определения вектора выбирается разрешающий столбец, который содержит наибольший положительный элемент среди коэфициентов целевой функции.

4 Когда линейная функция не ограничена на многограннике решений?

Если существует такая угловая точка многогранника решений, в котором линейная функция задачи линейного программирования достигает своего оптиума, если такой точки нет, значит функция не ограничена на многограннике решений.

5 Как определить вектор, подлежащий исключению из базиса? Какой элемент называется разрешающим?

Для определения вектора подлежащего исключению из базиса находит минимум(bi/ aij) для всех aij > 0.

Разрешающий элемент – любой ненулевой элемент.

6 Какой метод решения систем линейных уравнений лежит в основе симплексного метода?

Метод Жордана – Гаусса для системы линейных уравнений канонической формы ЗЛП.

7 Зачем в системе ограничений необходим единичный базис?

Для приведения системы ограничений неравенств к каноничному виду.

8 Какую простейшую геометрическую интерпретацию можно дать симплексному методу?

Каждое опорное решение канонической задачи ЛП является угловой точкой области допустимых значений.